数理解析研究所講究録
629巻 1987年 1-30

特異点の解消とIgusa local zeta functionの計算

筑波大数学系　木村達雄(Tatsuo KIMURA)

この小論は，著者が井草先生から教わった事の一部を適当にまとめたものであるが，将来この方面の研究が大切であろうと思われる。特に概均質ベクトル空間の相対不変式に対するIgusa local zeta functionが興味あるが，それは別の機会にゆずり，ここではごく特別な場合のみを論ずる。

K = p進体 $\supset O_K \supset P_K = \pi O_K$，$O_K/P_K = \mathbb{F}_q$ などの記号は通常の通りとする。 Kの絶対値 $|\ |_K$ を $|\pi|_K = q^{-1}$ と正規化しておく。また $U_K = O_K - P_K$ とおく.

dx を K^n の Haar measure で O_K^n の volume が 1 になるものとする。

$O_K[x_1, \cdots, x_n] \ni f(x) \neq 0$，$\mathrm{Re}\, s > 0$ に対して，$|f(x)|_K^s$ は K^n上の $\mathbb{C}$-valued continuous function になる。 このとき，

$Z(s) = \int_{O_K^n} |f(x)|_K^s dx$ を Igusa local zeta function とよぶ（Serre が命名した）.

$Z(s)$ は右半平面で holomorphic であるが これは $t = q^{-s}$ の有理関数になることが知られている.

Proposition 1. $O_K[x_1, \cdots, x_n] \ni f(x) = m$ 次斉次式

$N = \#\{\xi \bmod \pi \,;\, \xi \in O_K^n,\ f(\xi) \equiv 0 \bmod \pi\}$

$t = q^{-s}$, $f^{-1}(\pi^e U_K) = \{\xi \in O_K^n - \pi O_K^n \,;\, f(\xi) \in \pi^e U_K\}$ とおくとき, $Z(t) =$

$$\int_{O_K^n} |f(x)|_K^s\, dx = \frac{1}{1 - q^{-n} t^m} \left\{ (1 - q^{-n} N) + \sum_{e=1}^{\infty} t^e \cdot vol(f^{-1}(\pi^e U_K)) \right\}$$

次の3つの Lemmas を証明すれば Prop 1 が得られる。

Lemma 2. $U_n = O_K^n - \pi O_K^n$ とおくとき,

$$Z(t) = \frac{1}{1 - q^{-n} t^m} \int_{U_n} |f(x)|_K^s\, dx$$

Proof. $x = \pi y$ とおくと, $dx = q^{-n} dy$ 及び $f(x) = \pi^m f(y)$, 即ち $|f(x)|_K^s = t^m |f(y)|_K^s$ $(t = q^{-s})$

$$\Rightarrow \int_{\pi O_K^n} |f(x)|_K^s\, dx = q^{-n} t^m \int_{O_K^n} |f(y)|_K^s\, dy = q^{-n} t^m Z(t)$$

$$\| $$

$$Z(t) - \int_{U_n} |f(x)|_K^s\, dx \Rightarrow Z(t) = \frac{1}{1 - q^{-n} t^m} \int_{U_n} |f(x)|_K^s\, dx \quad //$$

Lemma 3. $\displaystyle\int_{U_n} |f(x)|_K^s \, dx = \sum_{e=0}^{\infty} vol(f^{-1}(\pi^e U_K)) \cdot t^e$

Proof. $f(x) \in O_K[x_1, \cdots, x_n]$, $U_n = O_K^n - \pi O_K^n$ 故

$f(U_n) \subset O_K = \coprod_{e \geq 0} \pi^e U_K \amalg \{0\}$

$$\Rightarrow U_n = \coprod_{e \geq 0} f^{-1}(\pi^e U_K) \amalg \underbrace{f^{-1}(0)}_{\text{measure } 0}$$

$$\Rightarrow \int_{U_n} |f(x)|_K^s \, dx = \sum_{e \geq 0} \int_{f^{-1}(\pi^e U_K)} |f(x)|_K^s \, dx = \sum_{e=0}^{\infty} q^{-es} \int_{f^{-1}(\pi^e U_K)} dx$$

$$= \sum_{e=0}^{\infty} vol(f^{-1}(\pi^e U_K)) \cdot t^e \qquad //$$

Lemma 4. $vol(f^{-1}(U_K)) = q^n - N$

但し $N = \#\{\xi \bmod \pi \,;\, \xi \in O_K^n,\ f(\xi) \equiv 0 \bmod \pi\}$

Proof. $f^{-1}(U_K) = \{\eta \in U_n = O_K^n - \pi O_K^n \mid f(\eta) \not\equiv 0 \bmod \pi\}$

$$= \sum_{\substack{\xi \bmod \pi \\ \xi \in U_n,\ f(\xi) \not\equiv 0 \bmod \pi}} (\xi + \pi O_K^n) = \sum_{\substack{\xi \bmod \pi \\ \xi \in O_K^n,\ f(\xi) \not\equiv 0 \bmod \pi}} (\xi + \pi O_K^n)$$

(" $\xi \in \pi O_K^n \Rightarrow f(\xi) \equiv 0 \bmod \pi$ " より)

一方 dx は Haar measure ゆえ $vol(\xi + \pi O_K^n) = vol(\pi O_K^n)$

$= q^{-n}$, 従って $f^{-1}(U_K) = \underbrace{\#\{\xi \bmod \pi \,;\, \xi \in O_K^n,\ f(\xi) \not\equiv 0 \bmod \pi\}}_{\substack{\| \\ \#\{\xi \bmod \pi \,;\, \xi \in O_K^n\} - N \\ \| \\ q^n - N}} \cdot q^{-n}$

$= (q^n - N) q^{-n} = 1 - q^{-n} N \qquad //$

定義　$f(x) \in O_K[x_1, \cdots x_n]$, $\xi \in O_K^n$ に対して

$$\nabla_\xi f \stackrel{\text{def}}{=\!=} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi) \end{bmatrix}$$

, とおく。

> *Proposition* 5　$\xi \in O_K^n$ が $\nabla_\xi f \not\equiv 0 \bmod \pi$ かつ $f(\xi) \equiv 0 \bmod \pi^e$ ($\exists e \geqq 1$), を満たすならば,
>
> $\#\{\eta \bmod \pi^{e+1} \ ; \ \eta \in O_K^n, \eta \equiv \xi \bmod \pi^e, f(\eta) \equiv 0 \bmod \pi^{e+1}\}$
> $= q^{n-1}$

Proof.　$\eta = \xi + \pi^e \alpha$　($\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in O_K^n$) とおくと

$$f(\eta) = f(\xi) + \pi^e \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\xi) \cdot \alpha_k + \pi^{2e}\beta \quad (\exists \beta \in O_K^n)$$

ゆえ　$f(\xi) + \pi^e \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\xi) \cdot \alpha_k \equiv 0 \bmod \pi^{e+1}$, 即ち

$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\xi) \cdot \alpha_k \equiv -\pi^{-e} f(\xi) \bmod \pi$　($\pi^{-e} f(\xi) \in O_K^n$ に注意) をみたす $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ の個数を $\bmod \pi$ で定めればよい。仮定から $\nabla_\xi f \not\equiv 0 \bmod \pi$ ゆえ, 例えば $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi) \not\equiv 0 \bmod \pi$　とすれば, $(\alpha_2, \cdots, \alpha_n) \bmod \pi \in (O_K/\pi O_K)^{n-1}$ は任意にとれて, これを与えれば $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi) \cdot \alpha_1 \equiv -\pi^{-e} f(\xi) - \sum_{k=2}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\xi) \alpha_k \bmod \pi$ をみたす α_1 は $\bmod \pi$ で unique に定まる. //

定義　$e \geq 1$, $\xi \in O_K^n$ に対して

$$W_{\xi,e} \overset{\mathrm{def}}{=} \{\eta \bmod \pi^e \,;\, \eta \in O_K^n,\ \eta \equiv \xi \bmod \pi,\ f(\eta) \equiv 0 \bmod \pi^e\}$$

とおく。これは $\xi \bmod \pi$ で定まる。

> **Proposition 6.**　$\xi \in O_K^n$ が $\nabla_\xi f \not\equiv 0 \bmod \pi$, $f(\xi) \equiv 0 \bmod \pi$ をみたすとき，　$\# W_{\xi,e} = q^{(n-1)(e-1)}$

Proof.　Prop. 5 は，

$$\begin{array}{ll} W_{\xi,e+1} = \{\eta \bmod \pi^{e+1} \,;\, \eta \equiv \xi \bmod \pi,\ f(\eta) \equiv 0 \bmod \pi^{e+1}\} \ni \eta \bmod \pi^{e+1} \\ \downarrow \bmod \pi^e \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \\ W_{\xi,e} = \{\eta' \bmod \pi^e \,;\, \eta' \equiv \xi \bmod \pi,\ f(\eta') \equiv 0 \bmod \pi^e\} \ni \eta \bmod \pi^e \end{array}$$

なる map が surjective で，各 fibre の元の個数が q^{n-1} であることをいっている。

$$W_{\xi,1} \xleftarrow{\bmod \pi} W_{\xi,2} \xleftarrow{\bmod \pi^2} \cdots \twoheadleftarrow W_{\xi,e} \xleftarrow{\bmod \pi^e} W_{\xi,e+1} \twoheadleftarrow \cdots$$

で　$\# W_{\xi,1} = \# \{\eta \bmod \pi \,;\, \eta \equiv \xi \bmod \pi,\ f(\eta) \equiv 0 \bmod \pi\} = 1$,

かつ　$\# W_{\xi,e+1} = q^{n-1} \cdot \# W_{\xi,e}$　ゆえ　帰納的に

$\# W_{\xi,e} = (q^{n-1})^{e-1} \cdot \# W_{\xi,1} = (q^{n-1})^{e-1}$.　　//

さて　$\xi (= \eta_1) \bmod \pi \leftarrow\!\shortmid\ \eta_2 \bmod \pi^2 \leftarrow \cdots \leftarrow\!\shortmid\ \eta_e \bmod \pi^e \leftarrow \cdots$

とするとき，$\{\eta_1, \eta_2, \cdots\}$ は O_K^n に於ける Cauchy 列をなす．実際 $\forall e \leq e'$ に対して，$\eta_e \equiv \eta_{e'} \bmod \pi^e$，即ち

$|\eta_e - \eta_{e'}|_K \leq q^{-e}$ for $\forall e' \geq e$ となる。O_K^n は $|\ |_K$ に関して完備だから，$\eta = \lim_{e\to\infty} \eta_e \in O_K^n$ が存在して $\eta \equiv \xi \bmod \pi$ かつ $f(\eta)=0$（これは $f(\eta)\equiv 0 \bmod \pi^e$ の limit をとればこうなる）となる．以上をまとめて次のいわゆる lifting lemma（又は Hensel's lemma）を得る．

Theorem 7. $f(x) \in O_K[x_1, \cdots, x_n]$，$\xi \in O_K^n$ に対して $\nabla_\xi f \not\equiv 0 \bmod \pi$，$f(\xi) \equiv 0 \bmod \pi$ ならば $\eta \in O_K^n$ で $\eta \equiv \xi \bmod \pi$ かつ $f(\eta)=0$ となるものがある．

これから，次の結果を得る．

Corollary 8. $m \in \mathbb{Z}$，$m > 0$ かつ $mO_K = O_K$ ならば，$U_K/U_K^m \xrightarrow[\bmod \pi]{\sim} \mathbb{F}_q^\times/(\mathbb{F}_q^\times)^m$ となる．特に $q=\text{odd}$ ならば，$U_K/U_K^2 \xrightarrow[\bmod \pi]{\sim} \mathbb{F}_q^\times/(\mathbb{F}_q^\times)^2$ (= order 2 の cyclic 群)

Proof. canonical map $O_K \to O_K/\pi O_K = \mathbb{F}_q$ は，$U_K \to \mathbb{F}_q^\times$ なる surjective hom. を induce するから，これより $U_K \xrightarrow{\varphi} \mathbb{F}_q^\times/(\mathbb{F}_q^\times)^m$ なる surjective hom. が得られる。

よって，$\mathrm{Ker}\,\varphi = U_K^m$，即ち

「$u \in U_K$, $\exists \xi \in U_K$ s.t. $\xi^m \equiv u \bmod \pi \Rightarrow u \in U_K^m$」

を示せばよい。

$f(x) = x^m - u \in O_K[x]$ とおく．$\xi \in U_K$ かつ $mO_K = O_K$ より

$\nabla_\xi f = m\xi^{m-1} \not\equiv 0 \bmod \pi$ ，かつ $f(\xi) = \xi^m - u \equiv 0 \bmod \pi$

となるから，Theorem 7 より $\exists \eta \in O_K$ s.t. $f(\eta) = \eta^m - u = 0$

$\Rightarrow u = \eta^m \in U_K^m$ （$\eta \in U_K = O_K - \pi O_K$ は $u \in U_K$ より明らか）

よって前半が示された。後半は，$q = \mathrm{odd} \Rightarrow 2 \not\equiv 0 \bmod \mathbb{F}_q$

$\Leftrightarrow 2 \not\equiv 0 \bmod \pi \Leftrightarrow 2 \in U_K = O_K - \pi O_K \Leftrightarrow 2O_K = O_K$ より. //

さて我々の次の目標は特別な場合に Prop 1 で得た結果を更に詳しく調べることである.

Theorem 9. $m(\geqq 1)$ 次斉次式 $f(x) \in O_K[x_1, \cdots, x_n]$ が，次の条件$\clubsuit$を満たすと仮定する.

条件$\clubsuit$：$\nabla_\xi f \not\equiv 0 \bmod \pi$ for $\forall \xi \in U_n (= O_K^n - \pi O_K^n)$.

このとき，$t = q^{-s}$，$\mathrm{Re}\, s > -1$ に対して，

$$Z(t) \overset{\mathrm{def}}{=} \int_{O_K^n} |f(x)|_K^s \, dx = \frac{(1-q^{-n}N)(1-t) + (1-q^{-1})(1-q^{-n})t}{(1-q^{-1}t)(1-q^{-n}t^m)}$$

ここで N は Prop 1 で定義された整数である。

まず次の Lemma を示す. $f^{-1}(\pi^e O_K) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\xi \in U_n ; f(\xi) \in \pi^e O_K\}$ とおくと，

Lemma 10 条件$\clubsuit$のもとで $e \geqq 1$ に対して

(i) $vol(f^{-1}(\pi^e O_K)) = (N-1) q^{-n-e+1}$

(ii) $vol(f^{-1}(\pi^e U_K)) = (N-1)(q-1) q^{-n-e}$

Proof. $f^{-1}(\pi^e O_K) \overset{\text{def}}{=} \{ \xi \in U_n ; f(\xi) \in \pi^e O_K \}$

$$= \sum_{\substack{\xi \bmod \pi^e \\ \xi \in U_n \\ f(\xi) \equiv 0 \bmod \pi^e}} (\xi + \pi^e O_K^n)$$

$$= \sum_{\substack{\xi \bmod \pi \\ \xi \in U_n \\ f(\xi) \equiv 0 \bmod \pi}} \quad \sum_{\substack{\eta \bmod \pi^e \\ f(\eta) \equiv 0 \bmod \pi^e \\ \eta \equiv \xi \bmod \pi}} (\eta + \pi^e O_K^n)$$

ここで dx は Haar measure ゆえ $vol(\eta + \pi^e O_K^n) =$ $vol(\pi^e O_K^n) = q^{-ne} vol(O_K^n) = q^{-ne}$ ゆえ

$$vol(f^{-1}(\pi^e O_K)) = \# \{ \xi \bmod \pi ; \xi \in U_n, f(\xi) \equiv 0 \ (\pi) \} \cdot \# W_{\xi,e} \cdot q^{-ne}$$

となるが

$\# \{ \xi \bmod \pi ; \xi \in U_n, f(\xi) \equiv 0 \bmod \pi \}$ $\quad (U_n = O_K^n - \pi O_K^n)$

$= \# \{ \xi \bmod \pi ; \xi \in O_K^n, f(\xi) \equiv 0 \bmod \pi \} - 1 = N - 1$

また, Prop 6 より $\# W_{\xi,e} = q^{(n-1)(e-1)}$, 従って

$$vol(f^{-1}(\pi^e O_K)) = (N-1) q^{(n-1)(e-1)} \cdot q^{-ne} = (N-1) q^{-n-e+1}$$

となり (i) を得る。

(ii) は, $vol(f^{-1}(\pi^e U_K)) = vol(f^{-1}(\pi^e O_K)) - vol(f^{-1}(\pi^{e+1} O_K))$

$$= (N-1) q^{-n-e+1} - (N-1) q^{-n-(e+1)+1}$$

$$= (N-1)(q-1) q^{-n-e}. \qquad //$$

Theorem 9 の証明） Prop 1 と Lemma 10 より

$$(1-q^{-n}t^m)\int_{O_K^n}|f(x)|_K^s\,dx = (1-q^{-n}N)+\sum_{e=1}^{\infty} vol(f^{-1}(\pi^e U_K))\cdot t^e$$

$$= (1-q^{-n}N)+(N-1)(q-1)q^{-n}\sum_{e=1}^{\infty}(q^{-1}t)^e$$

$$|q^{-1}t| = |q^{-s-1}| = q^{-\mathrm{Re}\,s-1} < 1 \iff \mathrm{Re}\,s > -1$$

ゆえ， $\mathrm{Re}\,s > -1$ のとき

$$\sum_{e=1}^{\infty}(q^{-1}t)^e = \frac{q^{-1}t}{1-q^{-1}t}$$ となり，

$$(1-q^{-n}t^m)\int_{O_K^n}|f(x)|_K^s\,dx = (1-q^{-n}N)+(N-1)(q-1)q^{-n}\cdot\frac{q^{-1}t}{1-q^{-1}t}$$

$$= \frac{(1-q^{-n}N)(1-q^{-1}t)+(1-q^{-1})(N-1)q^{-n}t}{1-q^{-1}t}$$ となる．

$$分子 = (1-q^{-n}N)\{(1-t)+t(1-q^{-1})\}+(1-q^{-1})(N-1)q^{-n}t$$

$$= (1-q^{-n}N)(1-t)+(1-q^{-1})t\{\underbrace{1-q^{-n}N+(N-1)q^{-n}}_{=\,1-q^{-n}}\}$$

$$= (1-q^{-n}N)(1-t)+(1-q^{-1})(1-q^{-n})t,$$

即ち

$$\int_{O_K^n}|f(x)|_K^s\,dx = \frac{1}{1-q^{-n}t^m}\cdot\frac{(1-q^{-n}N)(1-t)+(1-q^{-1})(1-q^{-n})t}{1-q^{-1}t}$$

$(\mathrm{Re}\,s > -1)$

// Th 9.

さて我々はTh.9の結果を別の方法，即ち singularity の resolution を用いて証明してみよう。その key point となるのは1986年のDenefの定理である。著者が1986年1月にアメリカのJohns Hopkins大学へ visiting associate professor として訪ねて最初に井草先生と大学で食事をしたときに，Igusa local zeta function の"Igusa予想"の重要性について色々伺ったのであるが，その一週間後にDenef（ベルギーの人）が7頁程の preprint を井草先生のもとに送ってきたが，その中でIgusa予想は完全に解かれていた。この論文は井草先生によると予想を解いたこと以上にもっと大事なことが含まれているがDenef自身も気付いてはいないのではないか，と色々説明して下さり深い感銘をうけた。そこで，そのDenefの定理を述べる．その応用であるIgusa予想の解決については省略する。

k＝数体，$k[x_1,\cdots,x_n]\ni f(x)\neq 0$ に対し $\mathbb{A}^n_k$ 内の f の zeros $V(f)$ の singularity の embedding resolution が"広中の定理"により存在する．即ち

k上定義された non-singular absolutely irreducible variety Y と k上定義された regular map $h: Y\to\mathbb{A}^n_k$ で次の3条件をみたすものがある。

(1) hは $Y-h^{-1}(V(f))$ 上では biregular.

(2) h は k 上定義された non-singular center をもつ blowing up の有限回の合成である。

(3) $h^{-1}(V(f))$ の k-既約成分は non-singular であり transversal に交わる（即ち $h^{-1}(V(f))$ に associate する reduced k-scheme は normal crossing のみをもつ）

$C_i\ (i \in T)$ を $h^{-1}(V(f))$ の k-既約成分として

$$\begin{cases} (f \circ h) = \sum_{i \in T} N_i C_i \\ (h^* \bigwedge_{i=1}^{n} dx_i) = \sum_{i \in T} (\nu_i - 1) C_i \end{cases}$$

とする。（( ) は divisor）

(2) より Y は $\mathbb{A}_k^n \times \mathbb{P}_k^l$ ($\exists l$) の subvariety としてよく，h を第一因子への projection map としてよい。$\mathbb{P}_k^l$ を standard な方法で $(l+1)$ ヶの affine open sets で cover する。U_0 をその1つの affine open set として

$$Y_0 = Y \cap (\mathbb{A}_k^n \times U_0) \subset \mathbb{A}_k^{n+l}$$

とおく。

$\mathbb{A}_k^{n+l}$ の affine 座標系を $(x, z) = (x_1, \cdots, x_n, z_1, \cdots, z_l)$ と記すと $h : (x, z) \mapsto x$，となる。

k の殆どすべての finite place v に対して $f(x) \in O_v[x]$ である。

$P_0 = \{\beta \in O_v[x, z] ; \beta = 0 \text{ on } Y_0\}$ は $O_v[x, z]$ の

ideal である。 $O_v/\pi O_v = \mathbb{F}_q$ として，そこへの reduction を $\overline{}$ で表わす。

Y_0 の reduction $\overline{Y_0}$ を $\overline{Y_0} = V(\overline{\mathcal{P}_0}) \subset \mathbb{A}^{n+l}_{\mathbb{F}_q}$ によって定義する。

但し $\overline{\mathcal{P}_0} = \{\overline{\beta}\ ;\ \beta \in \mathcal{P}_0\} \subset \mathbb{F}_q[x, z]$ である。

$(l+1)$ ケの affine open sets U_0 に対し，我々は reduction $\overline{Y_0}$ をもつが，これらをくっつけて reduction $\overline{Y} \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_q} \times \mathbb{P}^l_{\mathbb{F}_q}$ が得られる。

同様に C_i の reduction を $\overline{C_i}$， $\overline{h} : \overline{Y} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_q}$ で projection map を表わす。

Theorem 11 (Denef 1986) k の殆どすべての finite place v に対して次のことが成り立つ。

$O_v^n \supset W$ s.t. $W + \pi O_v^n \subset W$ に対して

$$Z_W(s) \overset{\mathrm{def}}{=} \int_W |f(x)|_v^s \cdot |dx|$$ とおくと，

$$Z_W(s) = q^{-n} \sum_{I \subset T} c_I \cdot \prod_{i \in I} \frac{(q-1)q^{-N_i s - \nu_i}}{1 - q^{-N_i s - \nu_i}} \left(= q^{-n} \sum_{I \subset T} c_I \cdot \prod_{i \in I} \frac{(q-1) q^{-\nu_i} t^{N_i}}{1 - q^{-\nu_i} t^{N_i}} \right)$$

但し， $c_I = \#\{\overline{a} \in \overline{Y}(\mathbb{F}_q) \mid \overline{a} \in \overline{C_i} \Leftrightarrow i \in I,\ \overline{h}(\overline{a}) \in \overline{W}\}$

$\overline{W} = \{\overline{x}\ ;\ x \in W\}$

この Denef's formula を使って Th 9 を証明してみよう。

$X = \mathrm{Aff}^n\ (n \geqq 2)$ の quadratic transformation を考える。

$$X \times \mathrm{Proj}^{n-1} \ni (x_1, \cdots, x_n\ ;\ \underbrace{z_1, \cdots, z_n}_{\text{homogeneous coordinate}})\ (=(x, z))$$

$$\cup$$

$$Y \overset{\text{def}}{=} \{(x, z)\ ;\ x_i z_j - x_j z_i = 0 \ \text{ for } \forall i, j\}$$

$$\begin{array}{ccccc} Y & \subset & X \times \mathrm{Proj}^{n-1} & & \ni (x, z) \\ h \downarrow & \circlearrowright & \downarrow \mathrm{Pr}_1 & & \downarrow \\ X & = & X & & \ni x \end{array}$$

$h \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Pr}_1|_Y$ により $h : Y \to X$ を定義すると，

$h^{-1}(0) = \{0\} \times \mathrm{Proj}^{n-1}$ となる。

一方，$x = (x_1, \cdots, x_n) \neq 0$ ならば，$\exists x_i \neq 0$ で

$x_i z_j - x_j z_i = 0$ により，$z_j = \left(\frac{z_i}{x_i}\right) x_j$ for $\forall j$

即ち $(z_1, \cdots, z_n) = \lambda (x_1, \cdots, x_n)$ $\left(\lambda = \frac{z_i}{x_i} \neq 0\right)$

となり $h : Y - h^{-1}(0) \xrightarrow{\sim} X - \{0\}$ となる.

さて，k = 数体，$f(x) \in k[x_1, \cdots, x_n]$ を $m(\geqq 1)$ 次斉次多項式で

(仮定 ✱) $\nabla_\xi f \neq 0$ for $\forall \xi \in X - \{0\}$,

をみたすものとする。これは critical point が原点のみということであるから大変強い条件である。

$\mathrm{Proj}^{n-1} \supset Z_1 = \{(z_1, \cdots, z_n) \,;\, z_1 \neq 0\}$ とおくと,

Z_1 では $y_i = \frac{z_i}{z_1}$ $(\forall i \neq 1)$ に対して,
$(y_2, \cdots, y_n)$ が Z_1 の affine local coordinate になる。

$Y_1 = Y \cap (X \times Z_1), \cdots$ とおけば,
$Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_n$ が affine open covering になる。

Y_1 のところで考えて, $y_1 = x_1$ とおくと

$x_1 z_j = x_j z_1$ $(\forall j = 2, \cdots, n) \Rightarrow x_j = x_1 y_j = y_1 y_j$ $(j = 2, \cdots, n)$

$\Rightarrow k[x_1, \cdots, x_n][y_2, \cdots, y_n] = k[y_1, y_2, \cdots, y_n]$

即ち, $y_1, \cdots, y_n$ が Y_1 に於ける局所座標であり,

Y_1 で $f(x) = f(x_1, \cdots, x_n) = x_1^m \cdot f(1, \frac{x_2}{x_1}, \cdots, \frac{x_n}{x_1})$

$= y_1^m \cdot f(1, y_2, \cdots, y_n)$,

即ち, $f \circ h(y_1, \cdots, y_n) = y_1^m \cdot f(1, y_2, \cdots, y_n)$

$$\Rightarrow (f \circ h) = \underset{(E_1)}{\underset{\shortparallel}{\{f(1, y_2, \cdots, y_n) = 0\}}} + m \underset{(E_2)}{\underset{\shortparallel}{\{y_1 = 0\}}}$$

但し

$E_1 \overset{\mathrm{def}}{=}$ Zariski-closure of $h^{-1}\{x \neq 0,\ f(x) = 0\}$

$E_2 \overset{def}{=} h^{-1}(0) \; (= \{0\} \times Proj^{n-1})$

$df(x) \neq 0$ for $\forall x \neq 0$ なる仮定があるから E_1 は既約，
E_2 も勿論既約である。

$(\; y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_j = x_1 y_j = 0 \; (2 \leq j \leq n) \Rightarrow x = (x_1, \cdots, x_n) = 0$

より $\{y_1 = 0\} \subset h^{-1}(0) \cap Y_1 \; (\subset \{y_1 (= x_1) = 0\})$ がわかる。)

次に $dx_1 = dy_1$，$dx_j = d(y_1 y_j) = y_1 dy_j \; (+ y_j dy_1)$

$$\Rightarrow h^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = dy_1 \wedge (y_1 dy_2) \wedge \cdots \wedge (y_1 dy_n)$$
$$= y_1^{n-1} dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$$

$$\Rightarrow (\, h^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)) = (n-1)\{y_1 = 0\} = (n-1) E_2$$

即ち $df(x) \neq 0$ for $\forall x \neq 0$ の仮定のもとでは

(1) $(f \circ h) = E_1 + m E_2 \quad (\Rightarrow N_1 = 1, \; N_2 = m)$

(2) $(h^*(\bigwedge_{i=1}^{n} dx_i)) = (n-1) E_2 \quad (\Rightarrow \nu_1 = 1, \; \nu_2 = n)$

となる。　この場合の Denef's formula (Th11) は，

Theorem 12　$df(x) \neq 0$ for $\forall x \neq 0$ とする。数体 k の殆どすべての finite place v に対して

$$Z(t) \overset{def}{=} \int_{O_v^n} |f(x)|_v^s dx_v = q^{-n} \Big\{ \# Y^0(\mathbb{F}_q) + \# E_1^0(\mathbb{F}_q) \cdot \frac{(q-1) q^{-1} t}{1 - q^{-1} t}$$
$$+ \# E_2^0(\mathbb{F}_q) \frac{(q-1) q^{-n} t^m}{1 - q^{-n} t^m} + \# E_{12}(\mathbb{F}_q) \cdot \frac{(q-1) q^{-1} t}{1 - q^{-1} t} \cdot \frac{(q-1) q^{-n} t^m}{1 - q^{-n} t^m} \Big\}$$

但し $E_{12}=E_1\cap E_2$, $Y^0=Y-E_1\cup E_2$, $E_i^0=E_i-E_1\cap E_2$ $(i=1,2)$ である．（殆どすべての finite place v に対して $f(x)\in O_v[x_1,\cdots,x_n]$ となる）

Theorem 12 を使って Theorem 9 の別証を与えよう（これは井草先生の The Johns Hopkins 大学に於ける1986年2月19日(水)午後1:00〜1:50 の講義で Exercise として出された問題である．この小論では私自身によるのはこの部分だけである．翌週井草先生に会ったとき「あの Exercise はできましたか？」「ハイ」「それはおめでとう」…）

$x=(x_1,\cdots,x_n)\neq 0$ かつ $x_iz_j-x_jz_i=0$ ($\forall i,j$) のとき，$x_k\neq 0$ とすると，$z_j=\left(\dfrac{z_k}{x_k}\right)x_j$ for $\forall j$ で $(z_1,\cdots,z_n)\neq 0$ ゆえ $z_k\neq 0$，よって $f(x_1,\cdots,x_n)=0$ なら $f(z_1,\cdots,z_n)=0$，逆もいえる．即ち

$x\neq 0$ のとき，$f(x_1,\cdots,x_n)=0 \Leftrightarrow f(z_1,\cdots,z_n)=0$

$$\Rightarrow E_1=\overline{h^{-1}\{x\,;\,x\neq 0,\ f(x)=0\}}$$

$$=\overline{\{(x_1,\cdots,x_n\,;\underbrace{z_1,\cdots,z_n}_{\text{homog.coordinate}})\,;\ x_iz_j-x_jz_i=0,\ f(z_1,\cdots,z_n)=0,\ x\neq 0\}}$$

$$=\{(x_1,\cdots,x_n\,;\underbrace{z_1,\cdots,z_n}_{\text{homog.coord.}})\,;\ x_iz_j-x_jz_i=0,\ f(z_1,\cdots,z_n)=0\}$$

$$E_2=h^{-1}(0)=\{(0,\underbrace{z_1,\cdots,z_n}_{\text{homog.coord.}})\}\ \Rightarrow\ \#E_2(\mathbb{F}_q)=\frac{q^n-1}{q-1}$$

$$E_{12} = E_1 \cap E_2 = \{ (0, \underbrace{z_1, \cdots, z_n}_{\text{homog. coordinate}}) \, ; \, f(z_1, \cdots, z_n) = 0 \}$$

$$N \overset{\text{def}}{=} \#\{ \xi \bmod \pi \, ; \, \xi \in O_K^n, \, f(\xi) \equiv 0 \bmod \pi \} = \#\{ \xi \in \mathbb{F}_q^n \, ; \, f(\xi) = 0 \}$$

に注意すると $\boxed{\# E_{12}(\mathbb{F}_q) = \dfrac{N-1}{q-1}}$

$$\# E_{12}^0(\mathbb{F}_q) = \# E_2(\mathbb{F}_q) - \# E_{12}(\mathbb{F}_q) = \frac{q^n - 1}{q-1} - \frac{N-1}{q-1} = \frac{q^n - N}{q-1}$$

即ち $\boxed{\# E_2^0(\mathbb{F}_q) = \dfrac{q^n - N}{q-1}}$

$$E_1^0 = E_1 - E_{12} = \{ (x, z) \, ; \, x_i z_j - x_j z_i = 0, \, f(z_1 \cdots z_n) = 0 \} - \{ (0, z) \, ; \, f(z_1 \cdots z_n)$$

$$= 0 \} = \{ (x, z) \, ; \, x \neq 0, \, x_i z_j - x_j z_i = 0, \, f(z_1, \cdots, z_n) = 0 \}$$

$$= \{ (x_1, \cdots, x_n \, ; \, \underbrace{x_1, \cdots, x_n}_{\text{homog. coordinate}}) \, ; \, x \neq 0, \, f(x_1, \cdots, x_n) = 0 \}$$

$\Rightarrow \# E_1^0(\mathbb{F}_q) = \# \{ x \in \mathbb{F}_q^n \, ; \, x \neq 0, \, f(x) = 0 \} = N - 1$, 即ち

$$\boxed{\# E_1^0(\mathbb{F}_q) = N - 1}$$

さて集合としては, $Y = (X - \{0\}) \sqcup \mathrm{Proj}^{n-1}$ かつ

$E_1 \cup E_2 = \{ x \, ; \, x \neq 0, \, f(x) = 0 \} \sqcup \mathrm{Proj}^{n-1}$ ゆえ

$\# Y^0(\mathbb{F}_q) = \# \{ x \in \mathbb{F}_q^n \, ; \, f(x) \neq 0 \} = q^n - N$, 即ち $\boxed{\# Y^0(\mathbb{F}_q) = q^n - N}$

これ等の結果を Theorem 12 に代入すると，

$$Z(t) = q^{-n}\left\{ (q^{n}-N) + (N-1)\frac{(q-1)q^{-1}t}{1-q^{-1}t} + \frac{(q^{n}-N)q^{-n}t^{m}}{1-q^{-n}t^{m}} \right.$$

$$\left. + \frac{(N-1)q^{-1}t}{1-q^{-1}t}\cdot\frac{(q-1)q^{-n}t^{m}}{1-q^{-n}t^{m}} \right\} = \frac{A}{(1-q^{-1}t)(1-q^{-n}t^{m})}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} A = \ & (1-q^{-n}N)(1-q^{-1}t)(1-q^{-n}t^{m}) \quad \cdots\cdots \text{①} \\ & + q^{-n}(N-1)(q-1)q^{-1}t(1-q^{-n}t^{m}) \quad \cdots\cdots \text{②} \\ & + (1-q^{-n}N)q^{-n}t^{m}(1-q^{-1}t) \quad \cdots\cdots \text{③} \\ & + q^{-n}(N-1)q^{-1}t(q-1)q^{-n}t^{m} \quad \cdots\cdots \text{④} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (1-q^{-n}N)(1-q^{-1}t)\left\{(1-q^{-n}\cancel{t^{m}}) + q^{-n}\cancel{t^{m}}\right\} \quad \cdots \text{①+③} \\ &\quad + q^{-n}(N-1)(1-q^{-1})t\left\{(1-q^{-n}\cancel{t^{m}}) + q^{-n}\cancel{t^{m}}\right\} \quad \cdots \text{②+④} \end{aligned}$$

$$= (1-q^{-n}N)\left\{(1-t) + (t-q^{-1}t)\right\} + q^{-n}(N-1)(1-q^{-1})t$$

$$= (1-q^{-n}N)(1-t) + t(1-q^{-1})\left\{(1-q^{-n}\cancel{N}) + q^{-n}(\cancel{N}-1)\right\}$$

$$= (1-q^{-n}N)(1-t) + (1-q^{-1})(1-q^{-n})t$$

$$\Rightarrow Z(t) = \frac{(1-q^{-n}N)(1-t) + (1-q^{-1})(1-q^{-n})t}{(1-q^{-1}t)(1-q^{-n}t^{m})}$$

となり，再び Theorem 9 を得る。 //

以上のことからわかるように，*singularity* の *resolution* が具体的にわかる場合には，*Igusa local zeta* 関数をその方法で計算する可能性がでてくる。

$f(x)=$ 2次形式 の場合に Th 9 の結果を精密化しよう．できるだけ *self-contained* に記述する。まず一般論の復習．

$k=$ 任意の体，$X=$ k上の有限次元ベクトル空間，
$f: X \to k$ が 2次形式 (quadratic form) であるとは，

$$\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} (1)\ f(cx)=c^2 f(x) \text{ for } \forall c \in k,\ \forall x \in X \\ (2)\ f(x,y) \overset{\mathrm{def}}{=} f(x+y)-f(x)-f(y) \text{ は } k\text{-bilinear} \end{cases}$$

が成り立つこと ($\Rightarrow f(x,x)=2f(x)$).

$X \supset E = \forall$subset，に対して，$\langle E \rangle \overset{\mathrm{def}}{=} k$-span of E，
$E^{\perp} \overset{\mathrm{def}}{=} \{x \in X\ ;\ x \perp y \ (\text{i.e. } f(x,y)=0) \text{ for } \forall y \in E\}$
とおくと，$\langle E \rangle$, $E^{\perp}$ は X の k-subspace である。

$X^{\perp}=\{0\}$ のとき，$f(x)=$ <u>non-degenerate</u> というが，以下ではこれを仮定する．然らば

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Phi} & X^* \ (= X \text{ の dual}) \\ \Psi & & \Psi \\ x & \longmapsto & f_x \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} f_x : X & \to & k \\ \Psi & & \Psi \\ y & \mapsto & f(x,y) \end{array} \right)$$ は ($X^{\perp}=\{0\}$ より) *injection* である。

$\dim X = \dim X^*$ ゆえ これは *surjection* 即ち *bijection*.

(i) $X \supset E =$ *subspace* のときは，Φ は $E^{\perp} \xrightarrow{\sim} (X/E)^*$ $\cong \{x^* \in X^*\ ;\ x^*(E)=0\}$ を *induce* する．とくに，

$\dim E^{\perp} = \dim(X/E) = \dim X - \dim E$

(ii) $(E^{\perp})^{\perp} = E$.　∵) $(E^{\perp})^{\perp} \supset E$ は定義より明らか。一方 (i) より $\dim(E^{\perp})^{\perp} = \dim X - \dim E^{\perp} = \dim E$ より両者は一致する。　(iii) $f|_E = \text{non-deg.} \Leftrightarrow f|_{E^{\perp}} = \text{non-deg.}$

∵) $f|_E = \text{non-deg.} \Leftrightarrow E \cap E^{\perp} = \{0\} \underset{(ii)}{\Leftrightarrow} (E^{\perp})^{\perp} \cap E^{\perp} = \{0\}$

$\Leftrightarrow f|_{E^{\perp}} = \text{non-deg.}$　このとき ($E \cap E^{\perp} = \{0\}$, $\dim E + \dim E^{\perp} = \dim X$ より) $X = E \oplus E^{\perp}$.

定義：(1) $X \ni x$ が isotropic (アイソトロピック) $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(x) = 0$

(本によっては，$x \neq 0$ としているが，ここでは $x = 0$ も isotropic)

(2) $X \supset E = \text{subspace}$ が isotropic $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} E \ni {}^{\exists}x \neq 0$ s.t. $f(x) = 0$.　(3) isotropic でないとき anisotropic (アンアイソトロピック) という。即ち

$X \supset E$ が anisotropic $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(x) \neq 0$ for $\forall x \in E - \{0\}$

Lemma 13. $X \ni x \neq 0$ s.t. $f(x) = 0$
$\Rightarrow {}^{\exists}y \in X$ s.t. $f(y) = 0$ かつ $f(x, y) = 1$

∵) $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Phi} & k \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ y & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$ は k-linear form だが $\Phi = 0$ ならば $f(x, X) = 0$ (かつ $f = \text{non-degenerate}$) $\Rightarrow x = 0$ 矛盾。

よって $\Phi \neq 0$，よって $\Phi = \text{surjection}$。とくに ${}^{\exists}y_0 \in X$ s.t. $f(x, y_0) = 1$.　$c \in k$ に対して $f(cx + y_0) = c^2 f(x) + c f(x, y_0) + f(y_0) = c + f(y_0)$ ゆえ，

$c = -f(y_0)$, 即ち $y = -f(y_0)x + y_0$ とおけば,

$f(y)=0$ かつ $f(x,y) = f(x, -f(y_0)x) + f(x, y_0) = 1$

$$\left(\underset{\shortparallel}{f(x,-f(y_0)x)} = -f(y_0)f(x,x) = -2f(y_0)f(x) = 0 \right) \quad //$$

このとき, $f|_{\langle x, y\rangle}$ = non-degenerate. ∵) $\langle x, y\rangle \ni z_0 = c_0x + d_0y$ が $\forall z = cx + dy$ に対し $f(z_0, z) = c_0d + d_0c = 0$

$\Rightarrow c_0 = d_0 = 0 \Rightarrow z_0 = 0$ //

よって (iii) より $X = \langle x, y\rangle \oplus \langle x, y\rangle^\perp$ (一般に $X = E \oplus E^\perp \ni x = (x_1, x_2) \Rightarrow f(x) = f(x_1) + f(x_2)$)

もし $\langle x, y\rangle^\perp \ni \exists z$ s.t. $z \neq 0$, $f(z) = 0$ なら Lemma 13 より

$X = \langle x, y\rangle \hat{\oplus} \langle z, w\rangle \hat{\oplus} (\langle x, y\rangle \oplus \langle z, w\rangle)^\perp$ ($\hat{\oplus}$ は直交する直和のイミとする) 以下くり返して

$X = X_0 \hat{\oplus} H$, X_0 = anisotropic, H = hyperbolic,

即ち $H = \langle e_1, e_{r+1}\rangle \hat{\oplus} \cdots \hat{\oplus} \langle e_r, e_{2r}\rangle$, $f(e_i) = 0$ $(\forall i)$,

$f(e_i, e_{r+i}) = 1$ $(1 \leq i \leq r)$ 即ち $f(\sum_{i=1}^{2r} x_ie_i) = \sum_{i=1}^{r} x_ix_{i+r}$

と表わせる.

Lemma 14. $ch(k) \neq 2$ ならば, $X = \langle e_1\rangle \hat{\oplus} \cdots \hat{\oplus} \langle e_n\rangle$ と表わせる. 即ち $f(\sum x_ie_i) = a_1x_1^2 + \cdots + a_nx_n^2$ $(\forall a_i = f(e_i) \neq 0)$

∵) $f(x) \neq 0 \Rightarrow f(x,x) = 2f(x) \neq 0 \Rightarrow f|_{\langle x\rangle}$ = non-deg.

$\Rightarrow X = \langle x\rangle \hat{\oplus} \langle x\rangle^\perp$ かつ $f|_{\langle x\rangle^\perp}$ = non-deg. よって $\langle x\rangle^\perp \neq (0)$ なら $\exists y \in \langle x\rangle^\perp$ s.t. $f(y) \neq 0$ 以下くり返せばよい. //

以下 体 k は $ch(k) \neq 2$ とする。$f(x,x) = 2f(x)$ より，$f(x) = \frac{1}{2}f(x,x)$ が成り立つ．

$e_1, \cdots, e_n$ が X の k-basis のとき，$f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \frac{1}{2} f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \frac{1}{2}\, {}^t x T x$ $\left(x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\right.$

$\left. T = (f(e_i, e_j)) \in M_n \right)$ このとき，

$d(f) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \cdot \det T$ を f の判別式(discriminant) という．他の basis $(e_1', \cdots, e_n') = (e_1, \cdots, e_n)P$ $(P \in GL_n(k))$
$\Rightarrow T' = {}^t P T P \Rightarrow \det T' = (\det T) \cdot (\det P)^2$

よって，$d(f) \cdot (k^\times)^2$ は k-basis $e_1, \cdots, e_n$ の選び方によらぬ．時として，$d(f) \cdot (k^\times)^2$ を f の discriminant とよぶ。

$k = \mathbb{F}_q$ (有限体) の場合を考えよう。$ch(k) \neq 2 \Leftrightarrow q = odd$，に注意しよう．

Theorem 15. $n \geqq 3$ なる non-deg. な 2次形式 $f(x)$ $(= f(x_1, \cdots, x_n))$ は isotropic である．即ち $\exists x \neq 0$ s.t. $f(x) = 0$

(この Th 自身は $q = 2$巾 でも正しい)

$\because$) $n \geqq 3$ ゆえ Lemma 14 より $X = \langle e_1 \rangle \hat{\oplus} \langle e_2 \rangle \hat{\oplus} X'$ と表わせて，$X \ni x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x'$ に対して，

$f(x) = f(x_1 e_1) + f(x_2 e_2) + f(x') = x_1^2 f(e_1) + x_2^2 f(e_2) + f(x')$

$= c(x_1^2 - d x_2^2) + f(x')$　$\left(c = f(e_1),\ d = -\frac{f(e_2)}{c} \in k^\times \right)$

(i) $d = d'^2 \in (k^\times)^2$ の場合，$x = d'e_1 + e_2 \neq 0$ に対して，$f(x) = c\,((d')^2 - d(1)^2) = 0$ となり O.K.

(ii) $d \notin (k^\times)^2$ の場合，$\sqrt{d} \notin k = \mathbb{F}_q \Rightarrow k(\sqrt{d})$ は $k = \mathbb{F}_q$ の2次拡大 $\Rightarrow k(\sqrt{d}) = \mathbb{F}_{q^2}$，となる。

さて，$\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q$ = 2次 cyclic 拡大，で $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q) = \{1, \sigma\}$，$\sigma(x) = x^q$ ゆえ，

ノルム写像 $N : \mathbb{F}_{q^2} \to \mathbb{F}_q$ は $N(\xi) = \xi^{1+\sigma} = \xi^{1+q}$ であるが，これは surjection．実際（$N(0) = 0$ ゆえ），

$$\begin{array}{ccccccc} 1 \longrightarrow & \mathrm{Ker}\,N & \longrightarrow & \mathbb{F}_{q^2}^\times & \xrightarrow{N} & \mathbb{F}_q^\times & (\text{exact}) \\ & & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & \\ & & & \xi & \longmapsto & \xi^{1+q} & \end{array}$$

とすると，$\mathrm{Ker}\,N = \{ \xi \in \mathbb{F}_{q^2}^\times \ ;\ \xi^{1+q} - 1 = 0 \}$

$\Rightarrow \#\mathrm{Ker}\,N \leq q+1$，そして $\mathbb{F}_q^\times \supset N(\mathbb{F}_{q^2}^\times) = \mathbb{F}_{q^2}^\times / \mathrm{Ker}\,N$

$$\Rightarrow q-1 \geqq \# N(\mathbb{F}_{q^2}^\times) = \frac{q^2-1}{\#\mathrm{Ker}\,N} \geqq \frac{q^2-1}{q+1} = q-1$$

$$\Rightarrow \# N(\mathbb{F}_{q^2}^\times) = q-1 = \#\mathbb{F}_q^\times \Rightarrow N = \text{surjective} /\!/$$

さて $\mathbb{F}_{q^2} = k(\sqrt{d}) \ni x = x_1 + \sqrt{d}\,x_2$ $(x_1, x_2 \in k = \mathbb{F}_q)$ と表わされて，$N(x) = (x_1 + \sqrt{d}\,x_2)(x_1 - \sqrt{d}\,x_2) = x_1^2 - d x_2^2$.

今，$f(x') \neq 0$ なる $x' \in X'$ を1つ fix すると N は全射ゆえ $N(x_1 + \sqrt{d}\,x_2) = -\frac{f(x')}{c} = -\frac{f(x')}{f(e_1)} \in \mathbb{F}_q^\times$ なる x_1, x_2 が存在

するが，このとき，$x=x_1e_1+x_2e_2+x'\neq 0$ かつ $f(x)=0$ // 系15.

Corollary 16. $k=\mathbb{F}_q$ ($q=$ odd) 上の non-deg. 2次形式 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)$ ($n\geqq 3$) に対して，ある k-basis が存在して $X \xrightarrow{\sim} k^n$ s.t.

$$f(x)=\begin{cases} cx_1^2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n & (n=\text{odd}) \\ c(x_1^2-dx_2^2)+x_3x_4+\cdots+x_{n-1}x_n & (n=\text{even}) \end{cases}$$

このとき $(c,d\in k^\times)$

$$d(f)=2c\ (n=\text{odd}),\quad d(f)=(2c)^2d\ (n=\text{even})$$

∵) 前半は Lemma 14 (及びその前に述べたこと) と系15より明らか.

$n=$ odd なら $f(x)=\frac{1}{2}{}^tx\,T\,x$,
$$T=\left(\begin{array}{c|ccc} 2c & & 0 & \\ \hline & \boxed{\begin{matrix} & 1\\ 1 & \end{matrix}} & & \\ 0 & & \underbrace{\ddots}_{\frac{n-1}{2}\text{コ}} & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} & 1\\ 1 & \end{matrix}} \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \det T=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot 2c$

$\Rightarrow d(f)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot 2c=2c$ $\left(n=\text{odd}\Rightarrow \frac{n^2-1}{2}=\text{even}\right)$

$n=$ even なら

$f(x)=\frac{1}{2}{}^tx\,T\,x$,
$$T=\left(\begin{array}{cc|ccc} 2c & & & 0 & \\ & -2cd & & & \\ \hline & & \boxed{\begin{matrix} & 1\\ 1 & \end{matrix}} & & \\ & 0 & & \underbrace{\ddots}_{\frac{n-2}{2}} & \\ & & & & \boxed{\begin{matrix} & 1\\ 1 & \end{matrix}} \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \det T=(-(2c)^2d)(-1)^{\frac{n-2}{2}}$

$=(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot(2c)^2\cdot d \Rightarrow d(f)=(-1)^{\frac{n}{2}(n-1)}\det T=(-1)^{\frac{n^2}{2}}(2c)^2d$

$=(2c)^2d$ //

$i\in k=\mathbb{F}_q$，及び k^n 上の non-deg. 2次形式 $f(x)$ に対して

$N_n(i)\overset{\text{def}}{=}\#\{\xi\in k^n\,;\,f(\xi)=i\}$ とおく．この数は

k^n の base のとり方によらないから Cor 16 の標準形としても一般性を失なわない。

$\boxed{\text{Lemma 17.}\ n \geqq 3 \text{ のとき}，\ N_n(0) = q^{n-2}(q-1) + N_{n-2}(0)\cdot q}$

∵) $n \geqq 3$ ゆえ $\xi = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ に対して，

$f(\xi) = f(x_1e_1 + \cdots + x_{n-2}e_{n-2}) + x_{n-1}x_n$， 従って

$$\{\xi = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in k^n \ ;\ f(\xi) = 0\}$$

$$= \{\xi = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in k^n \ ;\ f(x_1e_1 + \cdots + x_{n-2}e_{n-2}) = -x_{n-1}x_n\}$$

$$= \bigcup_{i \in k^\times} \left\{\xi = x_1e_1 + \cdots + x_{n-2}e_{n-2} - \frac{i}{x_n}e_{n-1} + x_ne_n \ ;\ \begin{matrix} f(x_1e_1 + \cdots + x_{n-2}e_{n-2}) = i \\ x_n \neq 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\cup \left\{\xi = x_1e_1 + \cdots + x_{n-2}e_{n-2} + x_{n-1}e_{n-1} + x_ne_n \ ;\ \begin{matrix} f(x_1e_1 + \cdots + x_{n-2}e_{n-2}) = 0 \\ x_{n-1}x_n = 0 \end{matrix}\right\}$$

さて，$\#\{x_n \ ;\ x_n \neq 0\} = q-1$，$\#\{(x_{n-1}, x_n) \in k^2 \ ;\ x_{n-1}x_n = 0\}$ $= 2q-1$ （$(0,0)$を2回数えるから$2q$から1を引く），ゆえ

$$N_n(0) = \left\{\sum_{i \in k^\times} N_{(n-2)}(i)\right\}(q-1) + N_{n-2}(0)\cdot \underbrace{(2q-1)}_{\substack{\| \\ (q-1)+q}}$$

$$= \Big\{\underbrace{\sum_{i \in k} N_{(n-2)}(i)}_{\substack{\| \\ \# k^{n-2} \\ \| \\ q^{n-2}}}\Big\}(q-1) + N_{n-2}(0)\cdot q$$

$$= q^{n-2}(q-1) + N_{n-2}(0)q$$

//

定義：$\mathbb{F}_q^\times$ は order $(q-1)$ の cyclic 群 $\Rightarrow \mathbb{F}_q^\times = \langle \rho \rangle$

$2 \mid (q-1) \Rightarrow (\mathbb{F}_q^\times)^2 = \langle \rho^2 \rangle$ は index 2 の subgroup.

$\Rightarrow \mathbb{F}_q^\times / \mathbb{F}_q^{\times 2}$ は order 2 の cyclic 群，$= \{1, \sigma\}$

χ を $\mathbb{F}_q^\times/(\mathbb{F}_q^\times)^2$ の non-trivial character とする。即ち

$\chi : \mathbb{F}_q^\times/(\mathbb{F}_q^\times)^2 = \{1, \sigma\} \to \{\pm 1\}$ s.t. $\chi(\sigma) = -1$, $\chi(1) = 1$.

non-deg. 2次形式 $f(x)$ の判別式 $d(f)$ は $\mathrm{mod}\,(\mathbb{F}_q^\times)^2$ で定まるから，$\chi(d(f))$ は base のとり方によらず定まる。

> **Theorem 18.** $n \geqq 1$, $k = \mathbb{F}_q$, $ch(k) \neq 2$ として，$f(x)$ を k^n 上の non-degenerate な二次形式とする。然らば
>
> $$N_n(0) \overset{\text{def}}{=} \#\{\xi \in k^n \,;\, f(\xi) = 0\}$$
> $$= \begin{cases} q^{n-1} & (n = \text{odd}) \\ q^{n-1}\{1 + \chi(d)(q-1)q^{-\frac{n}{2}}\} & (n = \text{even}) \end{cases}$$

Proof. Cor. 16 の標準形で計算すればよい。

$n = $ odd の場合）$n = 1$ とすると，$N_1(0) = \#\{\xi \in k \,;\, c\xi^2 = 0\} = \#\{0\} = 1 = q^{n-1}\,(n=1)$ で O.K. $n \geqq 3$ として，$n-2$ では成立つと仮定する。即ち $N_{n-2}(0) = q^{n-3}$. Lemma 17 より $N_n(0) = q^{n-2}(q-1) + q^{n-3}\cdot q = q^{n-1}$ となり O.K.

$n = $ even の場合）　まず $n = 2$ のとき，定義から，

$N_2(0) = \#\{(x_1, x_2) \in k^2 \,;\, x_1^2 - d x_2^2 = 0\}$ となる。

$$x_1^2 - d x_2^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = 0 \\ \text{または} \\ (x_1, x_2) \in k^{\times 2} \Rightarrow d = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 \in (\mathbb{F}_q^\times)^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \chi(d) = 1 \end{cases}$$

従って，$\chi(d) = -1 \Rightarrow N_2(0) = 1$.

$\chi(d) = 1$ 即ち，$d = d'^2$ $(d' \in k)$ のときは，$x_1^2 - d x_2^2 = (x_1 + d' x_2)(x_1 - d' x_2) = 0$.

さて $y_1 = x_1 + d' x_2$, $y_2 = x_1 - d' x_2$ とおくと，

$ch(k) \neq 2$ ゆえ，$x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$, $x_2 = \frac{1}{2d'}(y_1 - y_2)$

$$\Rightarrow N_2(0) = \#\{(y_1, y_2) \in k^2 \,;\, y_1 y_2 = 0\} = 2q - 1$$

$$\Rightarrow N_2(0) = \begin{cases} 2q-1 & (\chi(d) = 1) \\ 1 & (\chi(d) = -1) \end{cases} = q + \chi(d)(q-1)$$

$$= q^{n-2}\left\{1 + \chi(d)(q-1) q^{-\frac{n}{2}}\right\}\Big|_{n=2}$$ で成り立っている.

$n \geqq 4$ として，$(n-2)$ で成り立つとする．即ち，

$N_{n-2}(0) = q^{n-3}\left\{1 + \chi(d)(q-1) q^{-\frac{n}{2}+1}\right\}$ とする．Lem 17

より，$N_n(0) = q^{n-2}(q-1) + N_{n-2}(0) \cdot q$

$$= q^{n-2}(q-1) + q^{n-2}\left\{1 + \chi(d)(q-1) q^{-\frac{n}{2}+1}\right\}$$

$$= q^{n-1}\left\{1 + \chi(d)(q-1) q^{-\frac{n}{2}}\right\}$$ となり O.K.

// Th 18.

Proposition 19. $f(x) \in O_K[x_1, \cdots, x_n]$ を non-deg. な2次形式とする。このとき、次の2条件は同値。

(1) $\nabla_\xi f \not\equiv 0 \mod \pi$ for $\forall \xi \in U_n = O_K^n - \pi O_K^n$

(2) $d = d(f)$ を f の判別式とするとき、

$d = d(f) \in U_K = O_K - \pi O_K$.

Proof. $O_K/\pi O_K = \mathbb{F}_q$ で考えると、

$(1) \Leftrightarrow (1)'$ $\nabla_\xi f \neq 0$ for $\forall \xi \in \mathbb{F}_q^n$, $\xi \neq 0$.

$(2) \Leftrightarrow (2)'$ $d(f) \in \mathbb{F}_q^\times$ 即ち $d(f) \neq 0$,

ゆえ $(1)' \Leftrightarrow (2)'$ を示せばよい。$(1)'$, $(2)'$ とも base のとり方によらない性質だから、Cor. 16 の標準形で考えればよい。

<u>$n = \mathrm{odd}$</u>, $f(x) = c' x_1^2 + x_2 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n$ の場合は

$\nabla_\xi f = (2c'\xi_1, \xi_3, \xi_2, \cdots, \xi_n, \xi_{n-1})$ で、$d = d(f) = 2c'$.

次に、<u>$n = \mathrm{even}$</u>, $f(x) = c'(x_1^2 - d' x_2^2) + x_3 x_4 + \cdots + x_{n-1} x_n$ の場合は、$\nabla_\xi f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi)\right)$

$= (2c'\xi_1, -2c'd'\xi_2, \xi_4, \xi_3, \cdots, \xi_n, \xi_{n-1})$ で $d = d(f) = (2c')^2 d'$

いずれの場合も $\forall \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \neq 0$ に対して $\nabla_\xi f \neq 0$ となる条件は $d = d(f) \neq 0$ となることがわかる。 //

従って $d(f) \in U_K$ なる non-deg. 2次形式 $f(x)$ の Igusa local zeta function の計算に Th 9 （と Th 18）が使える.

即ち,

Theorem 20. $f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)\in O_K[x_1,\cdots,x_n]$ を non-deg. 2次形式, でその判別式 $d=d(f)\in U_K$ $(=O_K-\pi O_K)$ なるものとする. このとき, $t=q^{-s}$, $\mathrm{Re}\, s>-1$ に対して,

(1) $$Z(t)\overset{\mathrm{def}}{=}\int_{O_K^n}|f(x)|_K^s dx=\frac{(1-q^{-1})(1-q^{-n}t)}{(1-q^{-1}t)(1-q^{-n}t^2)}\quad (n=\text{odd})$$

(2) $$Z(t)=\int_{O_K^n}|f(x)|_K^s dx=\frac{(1-q^{-1})(1-\chi(d)q^{-\frac{n}{2}})}{(1-q^{-1}t)(1-\chi(d)q^{-\frac{n}{2}}t)}\quad (n=\text{even})$$

但し $O_K/\pi O_K=\mathbb{F}_q$, $q=\text{odd}$ とし, $\chi: U_K\to\{\pm1\}$ は $U_K/U_K^2\cong\mathbb{F}_q^\times/\mathbb{F}_q^{\times 2}$ (Cor 8 参照) によって引きおこされる non-trivial character とする。

Proof. Th 9 に於ける N は,

$$N\overset{\mathrm{def}}{=}\#\{\xi \bmod \pi\ ;\ \xi\in O_K^n,\ f(\xi)\equiv 0 \bmod \pi\}$$
$$=\#\{\xi\in\mathbb{F}_q^n\ ;\ f(\xi)=0\}$$
$$=\begin{cases} q^{n-1} & (n=\text{odd})\\ q^{n-1}(1+\chi(d)(q-1)q^{-\frac{n}{2}}) & (n=\text{even})\end{cases}$$ となる。

$n=\text{odd}$) $N=q^{n-1}$ を Th 9 の結果に代入して,

$$Z(t) = \frac{(1-q^{-n}\cdot q^{n-1})(1-t)+(1-q^{-1})(1-q^{-n})t}{(1-q^{-1}t)(1-q^{-n}t^2)}$$

$$= \frac{(1-q^{-1})\{1\cancel{-t+t}-q^{-n}t\}}{(1-q^{-1}t)(1-q^{-n}t^2)} = \frac{(1-q^{-1})(1-q^{-n}t)}{(1-q^{-1}t)(1-q^{-n}t^2)}$$

$n = \mathrm{even}$ の場合）　$\chi(d)^2 = 1$ ゆえ

$$\begin{cases} 1-q^{-n} = (1-\chi(d)q^{-\frac{n}{2}})(1+\chi(d)q^{-\frac{n}{2}}) \\ 1-q^{-n}t^2 = (1-\chi(d)q^{-\frac{n}{2}}t)(1+\chi(d)q^{-\frac{n}{2}}t) \end{cases}$$ である。

$N = q^{n-1}(1+\chi(d)(q-1)q^{-\frac{n}{2}})$ を Th 9 に代入すると，

$$Z(t) = \frac{\{1-q^{-n}\cdot q^{n-1}(1+\chi(d)(q-1)q^{-\frac{n}{2}})\}(1-t)+(1-q^{-1})(1-q^{-n})t}{(1-q^{-1}t)(1-q^{-n}t^2)}$$

ここで，分子 $= \{1-q^{-1}-\chi(d)(1-q^{-1})q^{-\frac{n}{2}}\}(1-t)+(1-q^{-1})(1-q^{-n})t$

$$= (1-q^{-1})\Big[(1-\chi(d)q^{-\frac{n}{2}})(1-t)+\underbrace{(1-q^{-n})}_{=\,(1-\chi(d)q^{-\frac{n}{2}})(1+\chi(d)q^{-\frac{n}{2}})}t\Big]$$

$$= (1-q^{-1})(1-\chi(d)q^{-\frac{n}{2}})\Big[\underbrace{1-t+(1+\chi(d)q^{-\frac{n}{2}})t}_{=\,1+\chi(d)q^{-\frac{n}{2}}t}\Big]$$

$$\Rightarrow Z(t) = \frac{(1-q^{-1})(1-\chi(d)q^{-\frac{n}{2}})(1+\chi(d)q^{-\frac{n}{2}}t)}{(1-q^{-1}t)(1-\chi(d)q^{-\frac{n}{2}}t)(1+\chi(d)q^{-\frac{n}{2}}t)}$$

$$= \frac{(1-q^{-1})(1-\chi(d)q^{-\frac{n}{2}})}{(1-q^{-1}t)(1-\chi(d)q^{-\frac{n}{2}}t)}$$

// Th 20.